

Důkazy s využitím binomické věty

BINOMICKÁ VĚTA Pro každé a, b a každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{\text{STRUČNÝ ZÁPIS}} = \underbrace{\binom{n}{0} a^n b^0}_{\text{1. člen}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}}_{\text{ktý člen}} + \underbrace{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k}_{\text{(k+1) člen}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{\text{(n+1) člen}}$$

Příklady

- ① Dokažte, že výraz $\frac{(\sqrt{18^{17}}+1)(\sqrt{18^{17}}-1)}{289}$ je celé číslo.

Čitatel $\underbrace{(\sqrt{18^{17}}+1)}_{(a-b)} \underbrace{(\sqrt{18^{17}}-1)}_{(a+b)} = \underbrace{18^{17}-1}_{a^2-b^2}$ musí být násobek 289 (aby zlomek byl celé číslo).

Protože 289 je 17^2 , upravíme $18^{17}-1$ na $(17+1)^{17}-1$, rozepíšeme podle binomické věty a pokusíme se vytknout 17, příp. 17^2 - obdobně postupujeme v dalších příkladech.

$$\begin{aligned} 18^{17}-1 &= (17+1)^{17}-1 = \\ &= \binom{17}{0} 17^{17} \cdot 1^0 + \binom{17}{1} 17^{16} \cdot 1^1 + \binom{17}{2} 17^{15} + \dots + \binom{17}{15} 17^2 + \underbrace{\binom{17}{16} 17^1 + \binom{17}{17} 17^0}_{\substack{17 \cdot 17 = 17^2 \\ 1+1-1 \\ 0}} - 1 = \\ &= 17^2 \left[\underbrace{\binom{17}{0} 17^{15} + \binom{17}{1} 17^{14} + \dots + \binom{17}{15} + 1}_{\text{nějaké přirozené číslo } k \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 289k \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } \frac{(\sqrt{18^{17}}+1)(\sqrt{18^{17}}-1)}{289} = \frac{289k}{289} = k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow \text{zadaný výraz je celé číslo.}$$

- ② Užitím binomické věty dokažte, že výraz $40^n - 8^n - 5^n + 1$ je pro každé $n \in \mathbb{N}$ dělitelný 28.

$$\begin{aligned} 40^n - 8^n - 5^n + 1 &= 5^n \cdot 8^n - 8^n - 5^n + 1 = 8^n(5^n - 1) - 1(5^n - 1) = \\ &= (5^n - 1)(8^n - 1) \end{aligned}$$

Protože $28 = 4 \cdot 7$ upravíme dvojčleny $5^n - 1$ a $8^n - 1$ a rozepíšeme podle binomické věty.

$$\begin{aligned} 5^n - 1 &= (4+1)^n - 1 = \binom{n}{0} 4^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} 4^{n-1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} 4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} 4^1 + \\ &+ \underbrace{\binom{n}{n} 4^0 - 1}_{\substack{1+1-1 \\ 0}} = 4 \left[\underbrace{\binom{n}{0} 4^{n-1} + \binom{n}{1} 4^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}}_{\text{nějaké přirozené číslo } k \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 4k_1 \quad (k_1 \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8^n - 1 &= (7+1)^n - 1 = \binom{n}{0} 7^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} 7^{n-1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} 7^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} 7^1 + \\ &+ \underbrace{\binom{n}{n} 7^0 - 1}_{\substack{1+1-1 \\ 0}} = 7 \left[\underbrace{\binom{n}{0} 7^{n-1} + \binom{n}{1} 7^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}}_{\text{nějaké přirozené číslo } k \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 7k_2 \quad (k_2 \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\text{Tedy } 40^n - 8^n - 5^n + 1 = (5^n - 1)(8^n - 1) = 4k_1 \cdot 7k_2 = 28k_1k_2 = 28k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$\Rightarrow$ výraz je dělitelný 28.

③ Pomocí binomické věty dokažte

a) číslo $11^{10} - 1$ je dělitelné 100.

$$\begin{aligned}
 11^{10} - 1 &= (10 + 1)^{10} - 1 = \\
 &= \binom{10}{0} 10^{10} \cdot 1^0 + \binom{10}{1} 10^9 + \binom{10}{2} 10^8 + \dots + \binom{10}{8} 10^2 + \underbrace{\binom{10}{9} 10^1 + \binom{10}{10} 10^0 - 1}_{\substack{10 \cdot 10 = 10^2 \\ \frac{1 \cdot 1 - 1}{0}}} = \\
 &= 10^2 \left[\underbrace{\left(\binom{10}{0} 10^8 + \binom{10}{1} 10^7 + \dots + \binom{10}{8} + 1 \right)}_{k \in N \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 100k \quad (k \in N) \Rightarrow 100 \mid (11^{10} - 1) \text{ cbd.} \\
 &\hspace{15em} [\text{zkratka - což bylo dokázáno}]
 \end{aligned}$$

b) číslo $6^{2n} - 1$ je pro každé přirozené číslo dělitelné 7.

$$\begin{aligned}
 \text{1. zp. } 6^{2n} - 1 &= (7 - 1)^{2n} - 1 = \\
 &= \binom{2n}{0} 7^{2n} \cdot 1^0 - \underbrace{\left(\binom{2n}{1} 7^{2n-1} \cdot 1^1 + \binom{2n}{2} 7^{2n-2} - \binom{2n}{3} 7^{2n-3} + \dots + \binom{2n}{2n-2} 7^2 - \binom{2n}{2n-1} 7^1 + \right)}_{\text{u členů s lichými mocninami 1 - znanénko } \ominus \text{ a 1 nemusíme psát}} \\
 &+ \underbrace{\binom{2n}{2n} 7^0 - 1}_{\substack{1 \cdot 1 - 1 \\ 0}} = 7 \left[\underbrace{\left(\binom{2n}{0} 7^{2n-1} - \binom{2n}{1} 7^{2n-2} + \dots + \binom{2n}{2n-2} 7 - \binom{2n}{2n-1} \right)}_{k \in N \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 7k \quad (k \in N) \\
 &\Rightarrow 7 \mid (6^{2n} - 1) \text{ cbd.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{2. zp. } 6^{2n} - 1 &= (6^2)^n - 1 = 36^n - 1 = (35 + 1)^n - 1 \quad [7 \cdot 5 = 35 \Rightarrow 7 \mid 35] \\
 &= \binom{n}{0} 35^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} 35^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n-1} 35^1 + \underbrace{\binom{n}{n} 35^0 - 1}_{\substack{1 \cdot 1 - 1 \\ 0}} = \\
 &= 35 \left[\underbrace{\left(\binom{n}{0} 35^{n-1} + \binom{n}{1} 35^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} \right)}_{\text{nějaké přirozené číslo } k_1 \text{ (nemusíme počítat)}} \right] = 35k_1 = 7 \cdot 5k_1 = 7k \quad (k_1, k \in N) \\
 &\Rightarrow 7 \mid (6^{2n} - 1)
 \end{aligned}$$

④ Dokažte $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

$$\begin{aligned}
 0^n &= (1 - 1)^n = \\
 &= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot (-1)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot (-1)^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot (-1)^n \\
 0 &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \text{ cbd.}
 \end{aligned}$$

⑤ Určete součet $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$, kde $n \in N_0$.

V binomické větě $(a + b)^n$ položíme $a = b = 1$.

$$\begin{aligned}
 (1 + 1)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot 1^n \\
 2^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \quad \text{Součet je } 2^n.
 \end{aligned}$$